Koordinatentransformationen

1 Formeln

1.1 verwendete Symbole

- geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid Breite B, Lnge L
- Längendifferenz zum Bezugsmeridian $l = L - L_0$
- ebene Koord. Rechtswert (Easting) R, Hochw. (North.) H (geod. y, x / math. x, y)
- isometrische Breite q
- Index $_0$: Koordinatennullpunkt des Systems
- Maßstabsfaktor m_0
- Halbachsen a, b
- numerische Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$
- sonstige abgeleitete Größen: $n = \frac{a-b}{a+b}$
- $\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 B \qquad t = \tan B$
- $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \qquad V = W\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$
- Querkrümmung $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$
- E = Basis des natürlichen Logarithmus

1.2 isometrische Breite auf dem Ellipsoid

- isometrische Breite aus geographischer Breite

$$q = \ln\left(\left(\frac{1 - e\sin B}{1 + e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right)\right) \tag{1}$$

- geographische Breite aus isometrischer Breite
  iteratives Verfahren:

$$\text{1. Näherung:} \qquad B_n = 2\arctan(\mathrm{E}^q) - \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

$$\text{Iterationen:} \qquad B_n = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{E}^q}{\left(\frac{1-e\sin B_n}{1+e\sin B_n}\right)^{\frac{e}{2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

1.3 Gauß-Krüger-/UTM-Koordinaten

- Meridianbogenlänge:

$$G = \frac{a}{1+n}\left(\left(1+\frac{n^2}{4}\right)B - \frac{3}{2}\left(n-\frac{n^3}{8}\right)\sin 2B + \frac{15}{16}n^2\sin 4B - \frac{35}{48}n^3\sin 6B\right) \tag{4}$$

- Fußpunktsbreite:

$$\text{1. Näherung:} \qquad B_{f_0} = G\frac{1+n}{a\left(1+\frac{n^2}{4}+\frac{n^4}{64}\right)} \tag{5}$$

$$B_f = B_{f_0} + \frac{3}{2}\left(n - \frac{9}{16}n^3\right)\sin 2B_{f_0} + \frac{21}{16}n^2\sin 4B_{f_0} + \frac{151}{96}n^3\sin 6B_{f_0} \tag{6}$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$\begin{aligned} H &= m_0\left(G + \frac{Nt}{2}l^2\cos^2 B + \frac{Nt}{24}(5-t^2+9\eta^2)l^4\cos^4 B\right.\\ &\quad\left.+\frac{Nt}{720}(61-58t^2+t^4+270\eta^2-330t^2\eta^2)l^6\cos^6 B\right) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R &= y_0 + 1000000kz + m_0\left(Nl\cos B + \frac{N}{6}(1-t^2+\eta^2)l^3\cos^3 B\right.\\ &\left.+\frac{N}{120}(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2)l^5\cos^5 B + \frac{N}{5040}(61-479t^2+179t^4)l^7\cos^7 B\right) \end{aligned} \tag{8}$$

- Berechnung geographischer Koordinaten:

$$G = \frac{H}{m_0} \Rightarrow B_f \Rightarrow \cos B, N, \ldots \qquad \text{und} \qquad y = (R - y_0 - 1000000kz)/m_0 \tag{9}$$

$$B = B_f - \frac{t}{2}(1+\eta^2)\frac{y^2}{N^2} + \frac{t}{24}(5+3t^2+6\eta^2-6t^2\eta^2)\frac{y^4}{N^4} + \frac{t}{720}(61+90t^2+45t^4)\frac{y^6}{N^6} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \frac{1}{\cos B}\frac{y}{N} - \frac{1}{6\cos B}(1+2t^2+\eta^2)\frac{y^3}{N^3} + \frac{1}{120\cos B}(5+28t^2+24t^4)\frac{y^5}{N^5}\\ &\quad - \frac{1}{240\cos B}(61+662t^2+1320t^4+720t^6)\frac{y^7}{N^7} \end{aligned} \tag{11}$$

1.4 konforme Lambertkoordinaten (1 Breitenkreis)

- Konstante:

$$R_0 = m_0 \frac{N}{\tan B_0} \tag{12}$$

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$\begin{aligned} r &= R_0 \mathrm{E}^{-\sin B_0 (q - q_0)} && (13) \\ \gamma &= l \sin B_0 && (14) \\ R &= y_0 + r \sin \gamma && (15) \\ H &= x_0 + R_0 - r \cos \gamma && (16) \\ & && (17) \end{aligned}$$

- Berechnung geographischer Koordinaten

$$\begin{aligned} y &= R - y_0 && (18) \\ x &= H - x_0 - R_0 && (19) \\ L &= L_0 - \frac{\arctan \frac{y}{x}}{\sin B_0} && (20) \\ q &= q_0 - \frac{\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R_0}}{\sin B_0} && (21) \\ & && (22) \end{aligned}$$

1.5 schiefachsige Merkatorprojektion

- Konstanten:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \arctan \frac{\tan B_0}{V} && (23) \\ \alpha &= \frac{V \cos B_0}{\cos \varphi_0} && (24) \\ k &= \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2})}{\mathrm{E}^{\alpha q_0}} && (25) \\ R_0 &= m_0 \frac{b}{W^2} && (26) \end{aligned}$$

- Berechnung ebener Koordinaten:
  1. Schritt: Ellipsoid $\Rightarrow$ Kugel:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha l && (27) \\ \varphi &= 2 \arctan \left(k \mathrm{E}^{\alpha q} \right) - \frac{\pi}{2} && (28) \end{aligned}$$

2. Schritt: Kugel $\Rightarrow$ Ebene:

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \arctan \frac{\sin\lambda}{\sin\varphi_0 \tan\varphi + \cos\varphi_0 \cos\lambda} && (29) \\ \varphi_r &= \arcsin(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda) && (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= R_0 \lambda_r + y_0 && (31) \\ H &= R_0 \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_r}{2}\right) + x_0 && (32) \end{aligned}$$

- Berechnung geographischer Koordinaten:

  1. Schritt: Ebene $\Rightarrow$ Kugel:

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \frac{R - y_0}{R_0} && (33) \\ \varphi_r &= 2 \arctan \mathrm{E}^{\frac{H - x_0}{R_0}} - \frac{\pi}{2} && (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin(\cos\varphi_0 \sin\varphi_r + \sin\varphi_0 \cos\varphi_r \cos\lambda_r) && (35) \\ \lambda &= \arcsin \frac{\cos\varphi_r \sin\lambda_r}{\cos\varphi} && (36) \end{aligned}$$

  2. Schritt: Kugel $\Rightarrow$ Ellipsoid:

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \frac{\lambda}{\alpha} && (37) \\ q &= \frac{\ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{k}}{\alpha} && (38) \end{aligned}$$

1.6 Soldner-Koordinaten

- Berechnung ebener Koordinaten:

$$H = G - G_0 + x_0 + m_0 \left(\frac{N}{2} l^2 \sin B \cos B + \frac{N}{24} (5 - t^2 + 5\eta^2) l^4 \sin B \cos^3 B \right) \quad (39)$$

$$R = y_0 + m_0 \left(N l \cos B - \frac{N}{6} l^3 \sin^2 B \cos B - \frac{N}{120} (8 - t^2) l^5 \sin^2 B \cos^3 B \right) \quad (40)$$

- Berechnung geographischer Koordinaten

  $G = G_0 + H \qquad \Rightarrow B_f \Rightarrow \cos B, N, \ldots$

$$B = B_f - (1 + \frac{e^2}{1 - e^2}) t \cos^2 B \left(\frac{y^2}{2N^2} - \frac{1}{24} (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9t^2\eta^2) \frac{y^4}{N^4} \right) \quad (41)$$

$$L = L_0 + \frac{1}{\cos B} \frac{y}{N} - \frac{1}{3\cos B} t^2 \frac{y^3}{N^3} + \frac{1}{15 \cos B} t^2 (1 + 3t^2) \frac{y^5}{N^5} \quad (42)$$

1.7 Ellipsoidübergang

- Umrechnung geographischer Koordinaten in kartesische Koordinaten
(h = ellipsoidische Höhe, sofern bekannt (nicht Normalnull-Höhe!))

$$
\begin{aligned}
X &= (N+h)\cos B\cos L \\
Y &= (N+h)\cos B\sin L \\
Z &= (N(1-e^2)+h)\sin B
\end{aligned}
\tag{43}
$$

- Ellipsoidübergang

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\beta\cos\gamma \\
a_{12} &= \cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\
a_{13} &= \sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\
a_{21} &= -\cos\beta\sin\gamma \\
a_{22} &= \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
a_{23} &= \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
a_{31} &= \sin\beta \\
a_{32} &= -\sin\alpha\cos\beta \\
a_{33} &= \cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Vom Eingabesystem ins Bezugssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
P_T & = & \Delta p & + & M & \cdot & D & \cdot & P_A \\
\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} & + & (1+m) & \cdot & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{45}
$$

sowie umgekehrt vom Bezugssystem ins Ausgabesystem

- Kartesisch zu geographisch

$$
\begin{aligned}
e'^2 &= \frac{a^2-b^2}{b^2} \\
s &= \sqrt{(X^2+Y^2)} \\
\Theta &= \arctan\frac{Za}{sb} \\
B &= \arctan\frac{Z+e'^2 b\sin^3\Theta}{s-e^2 a\cos^3\Theta} \\
L &= \arctan\frac{Y}{X} \\
h &= \frac{s}{\cos B}-N
\end{aligned}
\tag{46}
$$

- Datumsparameter in der Datei bezogen auf WGS 72